Hạt chuyển động trên một mặt cầu. Mô-men góc

Lý Lê

Ngày 15 tháng 8 năm 2009

Tóm tắt nội dung

Mô-men góc (angular momentum) là một thuộc tính vật lí rất quan trọng đối với các hạt vi mô. Trong nguyên tử, khi chuyển động xung quanh hạt nhân, electron sẽ sinh ra hai kiểu mô-men góc là mô-men góc orbital và mô-men góc spin. Trong phần này, chúng ta chỉ đề cập đến mô-men góc orbital và để đơn giản ta gọi là mô-men góc.

1 Mô-men góc trong cơ học cổ điển

Xét một hạt khối lượng m chuyển động trong hệ tọa độ $Oxyz$. Gọi $\mathbf{r}$ là vector từ gốc tọa độ đến vị trí tức thời của hạt. Ta có

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \tag{1}$$

Trong đó, x, y, z là tọa độ của hạt tại thời điểm đang xét; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ là những vector đơn vị.

Vector vận tốc của hạt được xác định dựa vào sự biến đổi vector vị trí của hạt theo thời gian

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} \tag{2}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Vector động lượng $\mathbf{p}$ được xác định bởi

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{3}$$

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Theo cơ học cổ điển, một hạt có khối lượng m khi quay quanh gốc tọa độ với vận tốc v sẽ sinh ra một vector mô-men góc $\mathbf{L}$ tỉ lệ thuận với vận tốc quay v và khoảng cách r

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{4}$$

Đây là tích hữu hướng của hai vector nên $\mathbf{L}$ sẽ là một vector. Độ lớn của nó được xác định bởi

$$L = |\mathbf{L}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}| \sin \alpha \tag{5}$$

với α là góc tạo bởi $\mathbf{r}$ và $\mathbf{p}$. Vector mô-men góc nằm trên trục vuông góc với mặt phẳng được tạo bởi vector vị trí $\mathbf{r}$ và vector vận tốc $\mathbf{v}$; chiều được xác định theo qui tắc bàn tay phải. Độ lớn $L = 0$ khi $\sin \alpha = 0$, nghĩa là khi $\mathbf{r}$ và $\mathbf{p}$ (hoặc $\mathbf{v}$) song song với nhau.

Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ được xác định như sau

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z$$

Tích hữu hướng của hai vector $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ là

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \times (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)$$

Đối với các vector đơn vị, ta có

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \sin(0) = 0$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Do đó

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_yB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x) \tag{6}$$

Như vậy, với

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z$$

ta có

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{i}(yp_z - zp_y) + \mathbf{j}(zp_x - xp_z) + \mathbf{k}(xp_y - yp_x) \tag{7}$$

Hoặc viết dưới dạng định thức

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} y & z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x & z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} \tag{8}$$

Đặt

$$L_x = yp_z - zp_y$$
$$L_y = zp_x - xp_z$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

Ta có

$$\mathbf{L} = \mathbf{i}L_x + \mathbf{j}L_y + \mathbf{k}L_z \tag{9}$$

Theo cơ học cổ điển, nếu một hạt có mô-men góc là L thì tất cả các thành phần L_x, L_y, L_z tương ứng sẽ được xác định đồng thời.

2 Mô-men góc trong cơ học lượng tử

2.1 Sự xác định đồng thời các thuộc tính vật lí

Như chúng ta đã biết, nếu hàm trạng thái ψ là một đặc hàm của toán tử $\widehat{A}$ với đặc trị α thì phép đo thuộc tính vật lí A được mộ tả bởi $\widehat{A}$ sẽ cho ta kết quả là α. Như vậy, nếu ψ là một đặc hàm đồng thời của hai toán tử $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$ với đặc trị α_1 và α_2

$$\widehat{A}_1\psi = \alpha_1\psi$$
$$\widehat{A}_2\psi = \alpha_2\psi$$

thì ta có thể xác định đồng thời những giá trị của các thuộc tính vật lí A_1 và A_2 được mô tả bởi $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$. Nếu tồn tại một đặc hàm đồng thời của hai toán tử $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$ thì

$$[\widehat{A}_1, \widehat{A}_2] = 0$$

Thật vậy, gọi ψ là đặc hàm đồng thời của $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$. Ta có

$$\widehat{A}_2(\widehat{A}_1\psi) = \widehat{A}_2(\alpha_1\psi) = \alpha_1(\widehat{A}_2\psi) = \alpha_1\alpha_2\psi$$

$$\widehat{A}_1(\widehat{A}_2\psi) = \widehat{A}_1(\alpha_2\psi) = \alpha_2(\widehat{A}_1\psi) = \alpha_2\alpha_1\psi$$

Do đó

$$\widehat{A}_1(\widehat{A}_2\psi) - \widehat{A}_2(\widehat{A}_1\psi) = \alpha_2\alpha_1\psi - \alpha_1\alpha_2\psi = 0$$
$$\Rightarrow \widehat{A}_1\widehat{A}_2 - \widehat{A}_2\widehat{A}_1 = [\widehat{A}_1, \widehat{A}_2] = 0 \tag{10}$$

Ngược lại, nếu các toán tử $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$ giao hoán với nhau thì ta có thể tìm được ít nhất một đặc hàm đồng thời cho hai toán tử $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$. Nói cách khác, nếu $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_2$ giao hoán với nhau thì các thuộc tính vật lí độc lập A_1 và A_2 được mô tả bởi hai toán tử này sẽ được xác định đồng thời.

Ví dụ: Xét hai toán tử

$$\widehat{x} = x \qquad \text{và} \qquad \widehat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$$

Ta có

$$[\widehat{x}, \widehat{p}_x] = [x, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}] = \frac{\hbar}{i}[x, \frac{d}{dx}]$$

Với

$$\begin{aligned}
[x, \frac{d}{dx}]f &= (x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x)f \\
&= x\frac{d}{dx}f - \frac{d}{dx}xf \\
&= xf' - (f + xf') \\
&= -f
\end{aligned}$$

Do đó

$$[x, \frac{d}{dx}] = -1$$

$$\Rightarrow [\widehat{x}, \widehat{p}_x] = \frac{\hbar}{i}[x, \frac{d}{dx}] = -\frac{\hbar}{i} = i\hbar \neq 0$$

Ta thấy $[\widehat{x}, \widehat{p}_x] \neq 0$ nên không thể tìm được một đặc hàm đồng thời của các toán tử $\widehat{x}$ và $\widehat{p}_x$. Như vậy, hai đặc tính tọa độ x và động lượng p_x không thể được xác định đồng thời. Điều này hoàn toàn phù hợp với nguyên lí bất định Heisenberg.

2.2 Các toán tử mô-men góc và tính giao hoán của chúng

Cũng giống như các đặc tính vật lí khác, trong cơ học lượng tử, thuộc tính vật lí mô-men góc được đặc trưng bởi một toán tử

$$\widehat{\mathbf{L}} = (\widehat{L}_x, \widehat{L}_y, \widehat{L}_z) \tag{11}$$

với

$$\widehat{L}_x = \widehat{y}\widehat{p}_z - \widehat{z}\widehat{p}_y = y(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}) - z(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}) = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}) \tag{12}$$

$$\widehat{L}_y = \widehat{z}\widehat{p}_x - \widehat{x}\widehat{p}_z = z(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}) - x(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}) = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}) \tag{13}$$

$$\widehat{L}_z = \widehat{x}\widehat{p}_y - \widehat{y}\widehat{p}_x = x(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}) - y(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}) = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) \tag{14}$$

Theo cơ học cổ điển, các thành phần L_x, L_y, L_z có thể được xác định đồng thời. Còn theo cơ học lượng tử liệu chúng ta có thể xác định đồng thời $\widehat{L}_x, \widehat{L}_y, \widehat{L}_z$? Nếu các thuộc tính L_x, L_y, L_z được xác định đồng thời thì $\widehat{L}_x, \widehat{L}_y, \widehat{L}_z$ sẽ giao hoán với nhau. Khi $\widehat{L}_x$ và $\widehat{L}_y$ giao hoán với nhau ta sẽ tìm được ít nhất là một đặc hàm chung cho chúng. Nếu $\widehat{L}_x$ và $\widehat{L}_y$ có chung một đặc hàm thì những thuộc tính vật lí của chúng sẽ được xác định đồng thời. Do đó, chúng ta sẽ khảo sát tính giao hoán của các toán tử này.

Ta có

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] &= [\widehat{y}\widehat{p}_z - \widehat{z}\widehat{p}_y, \widehat{z}\widehat{p}_x - \widehat{x}\widehat{p}_z] \\
&= [y\widehat{p}_z - z\widehat{p}_y, z\widehat{p}_x - x\widehat{p}_z] \\
&= [y\widehat{p}_z, z\widehat{p}_x] + [z\widehat{p}_y, x\widehat{p}_z] - [y\widehat{p}_z, x\widehat{p}_z] - [z\widehat{p}_y, z\widehat{p}_x]
\end{aligned}$$

Vì

$$y\widehat{p}_z = \widehat{p}_z y; \qquad x\widehat{p}_z = \widehat{p}_z x$$

$$z\widehat{p}_y = \widehat{p}_y z; \qquad z\widehat{p}_x = \widehat{p}_x z$$

nên

$$[y\widehat{p}_z, x\widehat{p}_z] = 0; \qquad [z\widehat{p}_y, z\widehat{p}_x] = 0$$

Do đó

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] &= [y\widehat{p}_z, z\widehat{p}_x] + [z\widehat{p}_y, x\widehat{p}_z] \\
&= y\widehat{p}_x\widehat{p}_z z - y\widehat{p}_x z\widehat{p}_z + x\widehat{p}_y z\widehat{p}_z - x\widehat{p}_y\widehat{p}_z z \\
&= y\widehat{p}_x(\widehat{p}_z z - z\widehat{p}_z) + x\widehat{p}_y(z\widehat{p}_z - \widehat{p}_z z) \\
&= -y\widehat{p}_x(z\widehat{p}_z - \widehat{p}_z z) + x\widehat{p}_y(z\widehat{p}_z - \widehat{p}_z z) \\
&= (z\widehat{p}_z - \widehat{p}_z z)(x\widehat{p}_y - y\widehat{p}_x) \\
&= (z\widehat{p}_z - \widehat{p}_z z)\widehat{L}_z
\end{aligned}$$

$$(z\widehat{p}_z - \widehat{p}_z z) = [z, \widehat{p}_z] = [z, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}] = -\frac{\hbar}{i}[\frac{\partial}{\partial z}, z] = i\hbar[\frac{\partial}{\partial z}, z] = i\hbar$$

Như vậy

$$[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] = i\hbar\widehat{L}_z \tag{15}$$

Tiến hành tương tự như trên, chúng ta cũng sẽ tìm được

$$[\widehat{L}_y, \widehat{L}_z] = i\hbar\widehat{L}_x \tag{16}$$

$$[\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] = i\hbar\widehat{L}_y \tag{17}$$

Tóm lại, chúng ta thấy *các thành phần của toán tử mô-men góc không giao hoán với nhau*. Điều này có nghĩa là chúng ta không thể biết một cách đầy đủ về toán tử mô-men góc. Đây là một kết quả có nhiều ý nghĩa, và rõ ràng là khác với lí thuyết cổ điển. Tuy nhiên, vấn đề vẫn chưa kết thúc. Chúng ta sẽ khảo sát tính giao hoán của $\widehat{L}^2$ với các thành phần của nó.

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_x] = [\widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2, \widehat{L}_x] = [\widehat{L}_x^2 + (\widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2), \widehat{L}_x]$$

Ta có

$$[\widehat{A} + \widehat{B}, \widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{C}] + [\widehat{B}, \widehat{C}]$$

với $\widehat{A} = \widehat{L}_x^2, \widehat{B} = (\widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2), \widehat{C} = \widehat{L}_x$, ta được

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_x] = [\widehat{L}_x^2, \widehat{L}_x] + [\widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2, \widehat{L}_x] = 0 + [\widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2, \widehat{L}_x]$$

Với

$$[\widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2, \widehat{L}_x] = [\widehat{L}_y^2, \widehat{L}_x] + [\widehat{L}_z^2, \widehat{L}_x] = [\widehat{L}_y\widehat{L}_y, \widehat{L}_x] + [\widehat{L}_z\widehat{L}_z, \widehat{L}_x]$$

Mặt khác, ta có

$$[\widehat{A}\widehat{B}, \widehat{C}] = \widehat{A}[\widehat{B}, \widehat{C}] + [\widehat{A}, \widehat{C}]\widehat{B}$$

Do đó

$$[\widehat{L}_y\widehat{L}_y, \widehat{L}_x] + [\widehat{L}_z\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] = \widehat{L}_y[\widehat{L}_y, \widehat{L}_x] + [\widehat{L}_y, \widehat{L}_x]\widehat{L}_y + \widehat{L}_z[\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] + [\widehat{L}_z, \widehat{L}_x]\widehat{L}_z$$

Vì

$$[\widehat{L}_y, \widehat{L}_x] = -[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] = -i\hbar\widehat{L}_z; \qquad [\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] = i\hbar\widehat{L}_y$$

nên

$$[\widehat{L}_y\widehat{L}_y, \widehat{L}_x] + [\widehat{L}_z\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] = -i\hbar\widehat{L}_y\widehat{L}_z - i\hbar\widehat{L}_z\widehat{L}_y + i\hbar\widehat{L}_z\widehat{L}_y + i\hbar\widehat{L}_y\widehat{L}_z = 0$$

Từ kết quả trên, ta được

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_x] = 0 \tag{18}$$

Tương tự, ta có

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_y] = 0; \qquad [\widehat{L}^2, \widehat{L}_z] = 0 \tag{19}$$

Như vậy, chúng ta có thể rút ra kết luận là cường độ mô-men góc L của một hạt vi mô chỉ có thể được xác định đồng thời với duy nhất một thành phần L_i. Nghĩa là, theo quan điểm của cơ học lượng tử, chúng ta không thể xác định được một cách chính xác vector mô-men góc $\mathbf{L}$ mà chỉ có thể xác định được cường độ của nó

$$L = |\mathbf{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \tag{20}$$

Muốn xác định chính xác $\mathbf{L}$ ta phải biết được cùng một lúc ba thành phần L_x, L_y, L_z của nó. Thông thường, thành phần L_z được chọn để xác định cùng với L^2.

Vì chúng ta có $[\widehat{L}_x^2, \widehat{L}_z] = 0$ nên sẽ tồn tại ít nhất một hàm Y nào đó là đặc hàm chung của $\widehat{L}_x^2, \widehat{L}_z$. Như vậy, các thuộc tính L^2 và L_z chắc chắn sẽ được xác định đồng thời. Các thành phần khác, ví dụ L_x, thì chưa thể xác định rõ ràng được vì $[\widehat{L}_x, \widehat{L}_z] = i\hbar\widehat{L}_y$.

2.3 Toán tử mô-men góc trong tọa độ cầu

Vì mô-men góc liên quan đến sự quay của hệ nên các toán tử mô-men góc như $\widehat{L}^2, \widehat{L}_z$ thường được biểu diễn trong tọa độ cầu.

Trong không gian ba chiều, chúng ta có thể chuyển một điểm $I(x, y, z)$ từ tọa độ Đê-các-tơ (Cartesian) sang tọa độ cầu (r, θ, φ). Do đó, trạng thái của một hạt có thể được mô tả bởi một hàm sóng dạng $\psi(r, \theta, \varphi)$. Trong đó, r là khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm $I(x, y, z)$; φ là góc tạo bởi hình chiếu của r lên mặt phẳng xy với trục dương x; θ là góc tạo bởi r và trục dương z. Ta có

$$x = r\sin\theta\cos\varphi; \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi; \qquad z = r\cos\theta \tag{21}$$

$$(0 \le r \le \infty; \qquad 0 \le \theta \le \pi; \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \qquad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{22}$$

Thể tích vô cùng nhỏ $dV = dxdydz$ trong hệ tọa độ cầu được xác định như sau

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \tag{23}$$

Ví dụ, thể tích của một khối cầu có bán kính R được xác định bởi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{r^3}{3}\Big|_0^R \times (-\cos\theta)\Big|_0^\pi \times (\varphi)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Gọi $\psi(x,y,z)$ là hàm sóng trong tọa độ Đê-các-tơ. Ta có

$$\frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi} \tag{24}$$

với

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi = -y$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\partial(r\sin\theta\sin\varphi)}{\partial\varphi} = r\sin\theta\cos\varphi = x$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\varphi} = 0$$

Như vậy, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial\varphi} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}(-r\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(r\sin\theta\cos\varphi) + 0 \\ &= x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x} = (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})\psi \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

Mặt khác, ta có

$$\widehat{L}_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

So sánh hai phương trình trên, ta thấy

$$\widehat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{25}$$

Với kĩ thuật tương tự nhưng cần nhiều phép biến đổi hơn ta xác định được $\widehat{L}^2$ như sau

$$\widehat{L}^2 = -\hbar^2\Big[\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big] \tag{26}$$

Chúng ta thấy trong tọa độ Đê-cac-tơ, toán tử mô-men góc phụ thuộc vào ba biến x, y, z. Tuy nhiên, trong tọa độ cầu, nó chỉ phụ thuộc vào hai biến là θ, φ.

3 Hạt chuyển động trên một vòng tròn

Phương trình Schrödinger cho hạt trong hộp một chiều là

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

Xét trường hợp hộp bị "*biến dạng*": trục x bị bẻ cong thành vòng tròn có bán kính r. Nếu l là chiều dài của hộp ban đầu thì ta có

$$l = 2\pi r \tag{27}$$

Gọi φ là góc được xác định bởi

$$\varphi = \frac{x}{r} \tag{28}$$

Vì $0 \leq x \leq l$ nên $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Như vậy, phương trình Schrödinger cho hạt chuyển động trên một vòng tròn bán kính r với thế năng $V = 0$ được viết như sau

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d^2\psi(\varphi)}{d\varphi^2} = E\psi(\varphi) \tag{29}$$

hay

$$\frac{d^2\psi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\frac{2mr^2E}{\hbar^2}\psi(\varphi) = -m_l^2\psi(\varphi) \tag{30}$$

với

$$m_l^2 = \frac{2mr^2E}{\hbar^2} \tag{31}$$

Phương trình (30) có nghiệm là

$$\psi(\varphi) = Ae^{im_l\varphi} \tag{32}$$

Để $Ae^{im\varphi}$ có thể là hàm sóng thì nó cần phải đơn trị. Điều này có nghĩa là nếu ta cộng $2\pi, 4\pi, \ldots, 2k\pi$ vào φ thì giá trị của $\psi(\varphi)$ vẫn không thay đổi. Do đó, ta có

$$Ae^{im_l\varphi} = Ae^{im_l(\varphi+2\pi)} = Ae^{im_l\varphi}e^{i2m_l\pi}$$

Ta suy ra

$$e^{i2m_l\pi} = \cos(2m_l\pi) + i\sin(2m_l\pi) = 1$$

Điều kiện để hai số phức bằng nhau là phần thực và phần ảo của chúng phải bằng nhau

$$\begin{cases} \cos(2m_l\pi) = 1 \\ \sin(2m_l\pi) = 0 \end{cases}$$

Để thỏa mãn điều kiện trên, m_l nhận những giá trị như sau

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{33}$$

Hằng số A được xác định dựa vào điều kiện chuẩn hóa

$$\begin{aligned} A^2 \int_0^{2\pi} \left| e^{im_l\varphi} \right|^2 d\varphi &= A^2 \int_0^{2\pi} \left(e^{im_l\varphi} \right)^* e^{im_l\varphi} d\varphi \\ &= A^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi A^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{34}$$

Như vậy, hàm sóng đã chuẩn hóa của hạt chuyển động trên một vòng tròn là

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi} \qquad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{35}$$

Năng lượng quay của hạt cũng được lượng tử hóa

$$E = m_l^2 \frac{\hbar^2}{2mr^2} = m_l^2 \frac{\hbar^2}{2I} \qquad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{36}$$

với $I = mr^2$ là mô-men quán tính của hạt.

Theo cơ học cổ điển, năng lượng của hạt chuyển động trên một vòng tròn được xác định như sau

$$E_c = \frac{J^2}{2I} \tag{37}$$

So sánh (36) và (37) ta thấy có mối liên hệ

$$J^2 = m_l^2 \hbar^2 \tag{38}$$

với J là độ lớn của mô-men góc (cổ điển); I là mô-men quán tính. Như vậy, độ lớn của mô-men góc trong cơ học lượng tử có thể liên quan đến m_l và $\hbar$. Thật vậy, $m_l\hbar$ chính là thành phần L_z của mô-men góc. Sau đây, ta sẽ kiểm tra lại nhận xét này.

Chúng ta có định đề rằng *nếu $\widehat{B}$ là toán tử mô tả một thuộc tính vật lí B thì mỗi phép đo thuộc tính B cho ra một đặc trị β_i của toán tử $\widehat{B}$.* Như vậy, nếu $m_l\hbar$ là đặc trị của $\widehat{L}_z$ thì ta có thể kết luận là mỗi phép đo L_z cho ta một giá trị $m_l\hbar$. Sau đây, ta sẽ chứng minh $m_l\hbar$ là các đặc trị của $\widehat{L}_z$ với đặc hàm $\psi(\varphi)$.

Ta có

$$\widehat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

và

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_z\psi(\varphi) &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(\varphi) \\
&= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\varphi}\Big) \\
&= -i^2m_l\hbar\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\varphi}\Big) \\
&= m_l\hbar\psi(\varphi)
\end{aligned}$$

Như vậy, rõ ràng $m_l\hbar$ là các đặc trị của $\widehat{L}_z$ với đặc hàm $\psi(\varphi)$. Nói cách khác, $m_l\hbar$ là kết quả mà ta sẽ thu được khi thực hiện phép đo mô-men góc theo trục z vuông góc với mặt phẳng đường tròn

$$L_z = m_l\hbar \qquad (m_l = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots) \tag{39}$$

4 Hạt chuyển động trên một mặt cầu

Xét sự chuyển động của hạt trên một mặt cầu với bán kính r không đổi. Nếu thế năng $V = 0$ thì Hamiltonian của hệ như sau

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\big) \tag{40}$$

Trong tọa độ cầu với bán kính r là hằng số, Hamiltonian được xác định bởi

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\Big[\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big] = \frac{1}{2mr^2}\widehat{L}^2 \tag{41}$$

Như vậy, phương trình Schrödinger của hạt chuyển động trên một mặt cầu là

$$\frac{1}{2mr^2}\widehat{L}^2\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \tag{42}$$

$$\Rightarrow \widehat{L}^2\psi(r,\theta,\varphi) = 2mr^2E\psi(r,\theta,\varphi) \tag{43}$$

Sau đây, ta tiến hành tách biến cho (43) bằng cách đặt

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \tag{44}$$

Ta viết lại (43) như sau

$$\widehat{L}^2\Big[R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] = 2mr^2E\Big[R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] \tag{45}$$

Vì $\widehat{L}^2$ không phụ thuộc vào biến r nên ta có thể đơn giản $R(r)$, thu được

$$\widehat{L}^2\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] = 2mr^2E\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] = L^2\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] \tag{46}$$

Mặt khác, ta có

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_z] = 0$$

Do đó, nếu $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ là đặc hàm của $\widehat{L}^2$ thì nó cũng là đặc hàm của $\widehat{L}_z$

$$\widehat{L}_z\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] = L_z\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] \tag{47}$$

với L_z là đặc trị.

Ta có

$$\widehat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Do đó, (47) trở thành

$$-i\hbar\Theta(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi(\varphi) = \Theta(\theta)L_z\Phi(\varphi) \tag{48}$$

$$-i\hbar\frac{d}{d\varphi}\Phi(\varphi) = L_z\Phi(\varphi) \tag{49}$$

$$\Rightarrow \Phi(\varphi) = Ae^{(iL_z/\hbar)\varphi} \tag{50}$$

Để $Ae^{(iL_z/\hbar)\varphi}$ có thể là hàm sóng thì

$$Ae^{(iL_z/\hbar)\varphi} = Ae^{(iL_z/\hbar)(\varphi+2\pi)} = Ae^{(iL_z/\hbar)\varphi}e^{(iL_z/\hbar)2\pi}$$

$$\Rightarrow e^{(iL_z/\hbar)2\pi} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{L_z}{\hbar} = 0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$$

hay

$$L_z = 0, \pm1\hbar, \pm2\hbar, \pm3\hbar\ldots \tag{51}$$

Như vậy, tương tự sự chuyển động của hạt trên một vòng tròn, sự chuyển động của hạt trên một mặt cầu cũng có thành phần mô-men góc L_z là

$$L_z = m_l\hbar \qquad (m_l = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots) \tag{52}$$

Tiếp theo, chúng ta tìm các đặc trị của $\widehat{L}^2$ từ phương trình

$$\widehat{L}^2\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] = L^2\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] \tag{53}$$

với $\widehat{L}^2$ được viết như sau

$$\widehat{L}^2 = -\hbar^2\Big(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)$$

Do đó (53) tương đương với

$$-\hbar^2\Big(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] = L^2\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big] \tag{54}$$

Nhân hai vế phương trình (54) với $\dfrac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$, ta được

$$-\frac{\hbar^2}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}\Big(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)\Big[\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\Big]=L^2 \tag{55}$$

Sau khi rút gọn, (55) trở thành

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\Big[\sin^2\theta\frac{d^2}{d\theta^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{d}{d\theta}+\lambda\sin^2\theta\Big]\Theta(\theta)=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \tag{56}$$

trong đó $\lambda=\dfrac{L^2}{\hbar^2}$.

Ta có

$$\Phi(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\varphi}\ \Rightarrow\ \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-m_l^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im_l\varphi}$$

Vì vậy, (56) trở thành

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\Big[\sin^2\theta\frac{d^2}{d\theta^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{d}{d\theta}+\lambda\sin^2\theta\Big]\Theta(\theta)=m_l^2 \tag{57}$$

hay

$$\Big[\frac{d^2}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d}{d\theta}+\lambda\Big]\Theta(\theta)=\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta) \tag{58}$$

Chuyển hết về một vế, ta được

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}+\Big(\lambda-\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\Big)\Theta(\theta)=0 \tag{59}$$

Phương trình (59) có cách giải *kinh điển* là chuyển nó thành phương trình Legendre bằng cách đặt $u=\cos\theta$. Tuy nhiên, chúng ta sẽ không đi theo cách này vì sự phức tạp của nó. Thay vào đó, ta sẽ đoán nghiệm, thế và thử.

Nếu $\Theta(\theta)=a$ (hằng số) thì

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}=0$$

Do đó

$$\lambda-\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}=0$$

Suy ra

$$\lambda=0\,;m_l^2=0\ (m_l=0) \tag{60}$$

Nếu $\Theta(\theta)=\sin\theta$, ta có

$$\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}=\cos\theta$$
$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=-\sin\theta$$

Do đó, (59) trở thành

$$-\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta + \left(\lambda - \frac{m_l^2}{\sin^2\theta}\right)\sin\theta = 0 \tag{61}$$

Sau khi đơn giản, ta được

$$-2\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta} + \lambda\sin\theta - \frac{m_l^2}{\sin\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta} = 2\sin\theta + \frac{m_l^2}{\sin\theta} \tag{62}$$

Phương trình trên thỏa mãn khi các hệ số của $\sin\theta$ và $\dfrac{1}{\sin\theta}$ ở hai vế bằng nhau

$$\lambda = 2 \qquad \text{và} \qquad m_l^2 = 1\ (m_l = \pm 1) \tag{63}$$

Tương tự, ta tìm được các kết quả như sau

Hàm thử	λ	m_l
$\Theta(\theta) = a$	0	0
$\Theta(\theta) = \sin\theta$	2	±1
$\Theta(\theta) = \cos\theta$	2	0
$\Theta(\theta) = \sin^2\theta$	6	±2
$\Theta(\theta) = \sin\theta\cos\theta$	6	±1
$\Theta(\theta) = \cos^2\theta - \frac{1}{3}$	6	0
$\vdots$		

(64)

Nếu cứ tiếp tục như trên, ta sẽ thấy λ nhận những giá trị

$$0 \qquad 2 \qquad 6 \qquad 12 \qquad 20 \qquad 30 \qquad \ldots \tag{65}$$

Một cách tổng quát, các giá trị λ có thể được biểu diễn như sau

$$\lambda = l(l+1) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{66}$$

l	λ	m_l
0	0	0
1	2	$0, \pm1$
2	6	$0, \pm1, \pm2$
3	12	$0, \pm1, \pm2, \pm3$
4	20	$0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$
5	30	$0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$
$\vdots$		

Theo (64), ta thấy khi $\lambda = 0$ ($l = 0$) thì $m_l = 0$; khi $\lambda = 2$ ($l = 1$) thì $m_l = 0, \pm 1$; khi $\lambda = 6$ ($l = 2$) thì $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$. Như vậy, một cách tổng quát, khi $l = k$ thì $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$. Nghĩa là với mỗi giá trị l sẽ có $2l + 1$ giá trị m_l.

Tóm lại, với

$$\lambda = \frac{L^2}{\hbar^2} = l(l+1) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{67}$$

ta suy ra

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{68}$$

Do đó, độ lớn của mô-men góc được xác định bởi

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{69}$$

Sau đây, chúng ta xác định một số giá trị L và L_z

l	m_l	$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$	$L_z = m_l\hbar$
0	0	0	0
1	0	$\hbar\sqrt{2}$	0
	-1	$\hbar\sqrt{2}$	$-\hbar$
	$+1$	$\hbar\sqrt{2}$	$+\hbar$
2	0	$\hbar\sqrt{6}$	0
	± 1	$\hbar\sqrt{6}$	$\pm\hbar$
	± 2	$\hbar\sqrt{6}$	$\pm 2\hbar$
3	0	$\hbar\sqrt{6}$	0
	± 1	$\hbar\sqrt{12}$	$\pm\hbar$
	± 2	$\hbar\sqrt{12}$	$\pm 2\hbar$
	± 3	$\hbar\sqrt{12}$	$\pm 3\hbar$

5 Hàm sóng của hạt chuyển động trên một mặt cầu

Hàm sóng của hạt chuyển động trên một mặt cầu là các đặc hàm của $\widehat{L}^2$ được xác định bởi

$$\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta(\theta)e^{im_l\varphi} \tag{70}$$

Chúng còn được gọi là các ***hàm điều hòa cầu*** (spherical harmonic) và được kí hiệu là Y_{l,m_l}

$$Y_{l,m_l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta(\theta)e^{im_l\varphi} \tag{71}$$

Trong đó

$$l = 0, 1, 2, \ldots; \qquad m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$$

Hàm $\Theta(\theta)$ được xác định dựa vào công thức sau

$$\Theta(\theta) = sin^{|m_l|}\theta \sum_{k=0}^{l-|m_l|} a_k \cos^k \theta \tag{72}$$

Ví dụ 1: khi $l = 0$, $m_l = 0$, ta có

$$\Theta_{00}(\theta) = a_0 \tag{73}$$

Hàm điều hòa cầu là

$$Y_{00} = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}$$

Hằng số a_0 được xác định từ điều kiện chuẩn hóa

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left|a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}\right|^2 \sin\theta d\theta d\varphi &= \int_0^\pi |a_0|^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im_l\varphi}\right|^2 d\varphi \\
&= \int_0^\pi |a_0|^2 \sin\theta d\theta = 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Như vậy

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{74}$$

Ví dụ 2: khi $l = 1$, $m_l = 0$, ta có

$$\Theta_{10}(\theta) = a_0 \cos\theta$$

Áp dụng điều kiện chuẩn hóa

$$\int_0^\pi |a_0^2| \cos^2\theta \sin\theta d\theta = |a_0^2| \int_{-1}^1 z^2 dz = 1$$

ta được $|a_0| = \sqrt{\frac{3}{2}}$ nên

$$\Theta_{10}(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta$$

Như vậy

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \tag{75}$$

Ví dụ 3: khi $l = 1$, $m_l = 1$, ta có

$$\Theta_{11}(\theta) = a_0 \sin\theta$$

Áp dụng điều kiện chuẩn hóa

$$\int_0^\pi |a_0^2| \sin^2\theta \sin\theta d\theta = |a_0^2| \int_{-1}^1 (1-z^2)dz = 1$$

ta được $|a_0| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$\Theta_{11}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

Như vậy

$$Y_{11}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi} \tag{76}$$

Tương tự, khi $l = 1$, $m_l = -1$, ta có

$$Y_{1-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi} \tag{77}$$

Bảng 1.1: Một số hàm điều hòa cầu đầu tiên

l	m_l	Y_{l,m_l}
0	0	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$
	1	$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$
	-1	$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$
2	0	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$
	±1	$Y_{2\pm1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$
	±2	$Y_{2\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$

Đối với trường hợp $l = 0$, ta chỉ có một hàm trạng thái là Y_{00}, ứng với $l = 0$ và $m_l = 0$. Nhưng với trường hợp $l = 1$, ta có đến 3 hàm trạng thái là $Y_{1-1}; Y_{10}; Y_{11}$, ứng với $m_l = -1, 0, 1$. Cả ba hàm $Y_{1-1}; Y_{10}; Y_{11}$ đều mô tả trạng thái với mô-men góc L có cường độ là $\hbar\sqrt{2}$. Tuy nhiên thành phần mô-men góc L_z thì khác nhau. Một cách tổng quát, với mỗi đặc trị L^2 có tất cả là $2l+1$ hàm trạng thái Y_{l,m_l} ứng với $2l+1$ giá trị m_l. Chúng ta nói bậc suy biến của đặc trị L^2 là $2l+1$.

Bài tập

1. Cho $\widehat{L}_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. Chứng minh

$$[\widehat{L}_z, \widehat{\varphi}] = -i\hbar$$

Ta có thể rút ra nhận xét gì từ kết quả trên?
2. Chứng tỏ rằng hàm sóng Y_{11} là đặc hàm đồng thời của $\widehat{L}_z$ và $\widehat{L}^2$. Xác định các đặc trị tương ứng.
3. Độ dài liên kết $C - C$ trong phân tử benzene là 1,40 Å. Một cách gần đúng, có thể xem các electron π trong benzene giống như hạt chuyển động trên một vòng tròn có chiều dài bằng sáu lần độ dài liên kết $C - C$. Dự đoán độ dài sóng của ánh sáng bị hấp thụ khi một electron π bị kích thích và di chuyển lên mức năng lượng gần nhất cho phân tử benzene. Lưu ý, khi $m_l \neq 0$, có hiện tượng suy biến.
4. Tính

$$\sum_{m_l=-l}^{l} \left| Y_{l,m_l}(\theta)(\varphi) \right|^2$$

khi $l = 1$ và khi $l = 2$. Nhận xét kết quả thu được.
5. Xác định giá trị các góc tạo bởi vector mô-men góc $\mathbf{L}$ và trục z trong trường hợp $l = 2$.
6. Chứng minh các hàm sóng $\psi(\varphi)$ của hạt chuyển động trên một vòng tròn trực giao với nhau

$$\int_0^{2\pi} \psi_n^* \psi_m d\varphi = 0 \qquad (m \neq n)$$