Phương pháp toán tử cho mô-men góc và cho dao động điều hòa

Lý lê

Ngày 9 tháng 9 năm 2009

Tóm tắt nội dung

Các đặc trị của những toán tử năng lượng cho dao động điều hòa và toán tử mô-men góc của hạt chuyển động trên một mặt cầu đã được xác định bằng cách giải phương trình vi phân. Sau đây, chúng ta sẽ sử dụng một phương pháp khác để tìm các đặc trị này, được gọi là *phương pháp toán tử bậc thang*. Theo đó, các đặc trị được xác định chỉ cần dựa vào các mối liên hệ giao hoán của các toán tử.

1 Phương pháp toán tử bậc thang cho mô-men góc

Chúng ta đã dùng chữ cái L để chỉ mô-men góc orbital. Sau đây, chúng ta sẽ dùng chữ cái M để chỉ mô-men góc nói chung. Có ba toán tử mô-men góc là $\widehat{M}_x, \widehat{M}_y, \widehat{M}_z$. Tính tất của chúng cũng giống như $\widehat{L}_x, \widehat{L}_y, \widehat{L}_z$ mà chúng ta đã biết. Các mối liên hệ giao hoán của chúng như sau

$$[\widehat{M}_x, \widehat{M}_y] = i\hbar\widehat{M}_z; \qquad [\widehat{M}_y, \widehat{M}_z] = i\hbar\widehat{M}_x; \qquad [\widehat{M}_z, \widehat{M}_x] = i\hbar\widehat{M}_y \tag{1}$$

Toán tử $\widehat{M}^2$ được xác định bởi

$$\widehat{M}^2 = \widehat{M}_x^2 + \widehat{M}_y^2 + \widehat{M}_z^2 \tag{2}$$

Chúng ta có

$$[\widehat{M}^2, \widehat{M}_x] = [\widehat{M}^2, \widehat{M}_y] = [\widehat{M}^2, \widehat{M}_z] = 0 \tag{3}$$

Nhiệm vụ của chúng ta là sẽ xác định các đặc trị của $\widehat{M}^2$ và $\widehat{M}_z$ dựa vào những mối liên hệ trên. Trước hết, chúng ta định nghĩa hai toán tử mới là *toán tử tăng* $\widehat{M}_+$ và *toán tử giảm* $\widehat{M}_-$ như sau

$$\widehat{M}_+ = \widehat{M}_x + i\widehat{M}_y \tag{4}$$

$$\widehat{M}_- = \widehat{M}_x - i\widehat{M}_y \tag{5}$$

$\widehat{M}_+$ và $\widehat{M}_-$ là những ví dụ về ***toán tử bậc thang*** (ladder operators). Sau đây, chúng ta khảo sát tính giao hoán của chúng với toán tử $\widehat{M}_z$.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{M}_+\widehat{M}_- &= (\widehat{M}_x + i\widehat{M}_y)(\widehat{M}_x - i\widehat{M}_y)\\ &= \widehat{M}_x^2 + i\widehat{M}_y\widehat{M}_x - i\widehat{M}_x\widehat{M}_y + \widehat{M}_y^2\\ &= \widehat{M}^2 - \widehat{M}_z^2 + i[\widehat{M}_y, \widehat{M}_x]\end{aligned}$$

Vì

$$[\widehat{M}_y, \widehat{M}_x] = -[\widehat{M}_x, \widehat{M}_y] = -i\hbar\widehat{M}_z$$

nên

$$\widehat{M}_+\widehat{M}_- = \widehat{M}^2 - \widehat{M}_z^2 + i[\widehat{M}_y, \widehat{M}_x] = \widehat{M}^2 - \widehat{M}_z^2 + \hbar\widehat{M}_z \tag{6}$$

Tương tự, ta tìm được

$$\widehat{M}_-\widehat{M}_+ = \widehat{M}^2 - \widehat{M}_z^2 - \hbar\widehat{M}_z \tag{7}$$

Ta có

$$[\widehat{M}_+, \widehat{M}_z] = [\widehat{M}_x + i\widehat{M}_y, \widehat{M}_z] = [\widehat{M}_x, \widehat{M}_z] + i[\widehat{M}_y, \widehat{M}_z]$$

với

$$[\widehat{M}_x, \widehat{M}_z] = -[\widehat{M}_z, \widehat{M}_x] = -i\hbar\widehat{M}_y$$

và

$$[\widehat{M}_y, \widehat{M}_z] = i\hbar\widehat{M}_x$$

Suy ra

$$[\widehat{M}_+, \widehat{M}_z] = -i\hbar\widehat{M}_y - \hbar\widehat{M}_x = -\hbar(\widehat{M}_x + i\widehat{M}_y) = -\hbar\widehat{M}_+ \tag{8}$$

Như vậy, chúng ta thấy

$$[\widehat{M}_+, \widehat{M}_z] = \widehat{M}_+\widehat{M}_z - \widehat{M}_z\widehat{M}_+ = -\hbar\widehat{M}_+ \tag{9}$$

Do đó

$$\widehat{M}_+\widehat{M}_z = \widehat{M}_z\widehat{M}_+ - \hbar\widehat{M}_+ \tag{10}$$

Tương tự, ta tìm được

$$\widehat{M}_-\widehat{M}_z = \widehat{M}_z\widehat{M}_- + \hbar\widehat{M}_- \tag{11}$$

Gọi Y là những đặc hàm chung của $\widehat{M}^2$ và $\widehat{M}_z$, ta có

$$\widehat{M}_zY = bY \tag{12}$$

$$\widehat{M}^2Y = cY \tag{13}$$

với b và c là những đặc trị cần xác định. Áp dụng toán tử $\widehat{M}_+$ lên (12), ta nhận được

$$\widehat{M}_+\widehat{M}_zY = b\widehat{M}_+Y \tag{14}$$

với $\widehat{M}_+\widehat{M}_z = \widehat{M}_z\widehat{M}_+ - \hbar\widehat{M}_+$, (14) trở thành

$$(\widehat{M}_z\widehat{M}_+ - \hbar\widehat{M}_+)Y = b\widehat{M}_+Y$$

hay

$$\widehat{M}_z(\widehat{M}_+Y) = (b+\hbar)(\widehat{M}_+Y) \tag{15}$$

Phương trình trên có nghĩa là hàm $(\widehat{M}_+Y)$ là một đặc hàm của toán tử $\widehat{M}_z$ với đặc trị là $(b+\hbar)$. Tiếp tục, áp dụng toán tử $\widehat{M}_+$ lên (15) và sử dụng phương trình $\widehat{M}_+\widehat{M}_z = \widehat{M}_z\widehat{M}_+ - \hbar\widehat{M}_+$, ta sẽ thu được

$$\widehat{M}_z(\widehat{M}_+^2Y) = (b+2\hbar)(\widehat{M}_+^2Y) \tag{16}$$

Cứ tiếp tục như trên nhiều lần với toán tử tăng $\widehat{M}_+$ ta sẽ thu được

$$\widehat{M}_z(\widehat{M}_+^kY) = (b+k\hbar)(\widehat{M}_+^kY) \qquad (k = 0, 1, 2, 3\ldots) \tag{17}$$

Tương tự, nếu ta áp dụng toán tử giảm $\widehat{M}_-$ lên (12) và lưu ý

$$\widehat{M}_-\widehat{M}_z = \widehat{M}_z\widehat{M}_- + \hbar\widehat{M}_-$$

ta sẽ thu được

$$\widehat{M}_z(\widehat{M}_-Y) = (b-\hbar)(\widehat{M}_-Y) \tag{18}$$

$$\widehat{M}_z(\widehat{M}_-^kY) = (b-k\hbar)(\widehat{M}_-^kY) \tag{19}$$

Tóm lại, bằng cách sử dụng các toán tử tăng và toán tử giảm lên đặc hàm với đặc trị b, chúng ta tạo ra từng nấc các giá trị đặc trị khác nhau là $b \pm k\hbar$.

$$\begin{array}{l} b+2\hbar \\ b+\hbar \\ b \\ b-\hbar \\ b-2\hbar \end{array}$$

Như vậy, những hàm $\widehat{M}_\pm^kY$ là những đặc hàm của $\widehat{M}_z$ với những đặc trị là $b \pm k\hbar$:

$$\widehat{M}_z(\widehat{M}_\pm^kY) = (b \pm k\hbar)(\widehat{M}_\pm^kY) \tag{20}$$

Sau đây chúng ta sẽ chứng minh những hàm này cũng là những đặc hàm của $\widehat{M}^2$ với cùng những đặc trị là c; nghĩa là ta chứng minh

$$\widehat{M}^2(\widehat{M}_\pm^kY) = c(\widehat{M}_\pm^kY) \tag{21}$$

Ta thấy $\widehat{M}^2$ giao hoán với $\widehat{M}_+$ và $\widehat{M}_-$. Thật vậy

$$[\widehat{M}^2, \widehat{M}_\pm] = [\widehat{M}^2, \widehat{M}_x \pm i\widehat{M}_y] = [\widehat{M}^2, \widehat{M}_x] \pm i[\widehat{M}^2, \widehat{M}_y] = 0 \tag{22}$$

Tương tự, ta có

$$[\widehat{M}^2, \widehat{M}_\pm^2] = [\widehat{M}^2, \widehat{M}_\pm]\widehat{M}_\pm + \widehat{M}_\pm[\widehat{M}^2, \widehat{M}_\pm] = 0 \tag{23}$$

Do đó

$$[\widehat{M}^2, \widehat{M}_\pm^k] = 0 \qquad \text{hay} \qquad \widehat{M}^2\widehat{M}_\pm^k = \widehat{M}_\pm^k\widehat{M}^2 \tag{24}$$

Từ (13), ta có

$$\widehat{M}_\pm^k\widehat{M}^2 Y = \widehat{M}_\pm^k cY = c\widehat{M}_\pm^k Y$$

Áp dụng (24), ta được

$$\widehat{M}^2(\widehat{M}_\pm^k Y) = c(\widehat{M}_\pm^k Y) \tag{25}$$

Đây là điều chúng ta cần chứng minh.

Đặt $Y_k = \widehat{M}_\pm^k Y$ và $b_k = b \pm k\hbar$, từ (20) ta có

$$\widehat{M}_z Y_k = b_k Y_k \tag{26}$$

suy ra

$$\widehat{M}_z\widehat{M}_z Y_k = \widehat{M}_z b_k Y_k = b_k \widehat{M}_z Y_k$$

hay

$$\widehat{M}_z^2 Y_k = b_k^2 Y_k \tag{27}$$

Lấy (25) trừ (27), ta được

$$\widehat{M}^2(\widehat{M}_\pm^k Y) - \widehat{M}_z^2 Y_k = c(\widehat{M}_\pm^k Y) - b_k^2 Y_k \tag{28}$$

Thế $\widehat{M}_\pm^k Y = Y_k$, ta có

$$\widehat{M}^2 Y_k - \widehat{M}_z^2 Y_k = cY_k - b_k^2 Y_k \tag{29}$$

hay

$$(\widehat{M}_x^2 + \widehat{M}_y^2)Y_k = (c - b_k^2)Y_k \tag{30}$$

Toán tử $\widehat{M}_x^2 + \widehat{M}_y^2$ tương ứng với một thuộc tính vật lí không âm, do đó nó sẽ có những đặc trị cũng không âm. Từ đó, ta suy ra

$$c - b_k^2 \geq 0 \qquad \text{hay} \qquad \sqrt{c} \geq |b_k|$$

Vì vậy

$$-\sqrt{c} \leq |b_k| \leq \sqrt{c} \tag{31}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Vì c là hằng số, trong khi đó k thì thay đổi, nên các đặc trị b_k sẽ bị chặn trên và chặn dưới. Chúng ta đặt b_{min} và b_{max} là những giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của b_k. Y_{min} và Y_{max} là những đặc hàm tương ứng

$$\widehat{M}_z Y_{min} = b_{min} Y_{min} \tag{32}$$

$$\widehat{M}_z Y_{max} = b_{max} Y_{max} \tag{33}$$

Từ (33), ta có

$$\widehat{M}_+ \widehat{M}_z Y_{max} = b_{max} \widehat{M}_+ Y_{max} \tag{34}$$

hay

$$\widehat{M}_z(\widehat{M}_+ Y_{max}) = (b_{max} + \hbar)(\widehat{M}_+ Y_{max}) \tag{35}$$

$$(\text{Vì } \widehat{M}_+ \widehat{M}_z = \widehat{M}_z \widehat{M}_+ - \hbar \widehat{M}_+)$$

Phương trình (35) cho ta thấy $\widehat{M}_+ Y_{max}$ là một đặc hàm của $\widehat{M}_z$ với đặc trị là $(b_{max} + \hbar)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng b_{max} là đặc trị lớn nhất của $\widehat{M}_z$. Để loại bỏ mâu thuẫn này và để (35) đúng thì hàm $\widehat{M}_+ Y_{max}$ phải bị triệt tiêu; nghĩa là

$$\widehat{M}_+ Y_{max} = 0 \tag{36}$$

Áp dụng toán tử giảm lên (36) và kết hợp với (7), ta được

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_- \widehat{M}_+ Y_{max} &= 0 \\
(\widehat{M}^2 - \widehat{M}_z^2 - \hbar \widehat{M}_z) Y_{max} &= 0 \\
(c - b_{max}^2 - \hbar b_{max}) Y_{max} &= 0 \\
(c - b_{max}^2 - \hbar b_{max}) &= 0
\end{aligned}$$

Như vậy

$$c = b_{max}^2 + \hbar b_{max} \tag{37}$$

Lý luận tương tự, ta có

$$\widehat{M}_- Y_{min} = 0 \tag{38}$$

$$c = b_{min}^2 - \hbar b_{min} \tag{39}$$

Từ (39) và (37), ta được

$$b_{max}^2 + \hbar b_{max} + \hbar b_{min} - b_{min}^2 = 0 \tag{40}$$

Giải phương trình trên cho ta kết quả

$$b_{max} = -b_{min}; \qquad b_{max} = b_{min} - \hbar \tag{41}$$

Chúng ta loại nghiệm thứ hai vì b_{max} không thể nhỏ hơn b_{min}. Vậy nên

$$b_{min} = -b_{max} \tag{42}$$

Mặt khác vì các giá trị b_k khác nhau từng nấc với giá trị là $\hbar$, nên

$$b_{max} - b_{min} = n\hbar \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{43}$$

Thế (42) vào (43), ta được

$$b_{max} = \frac{1}{2}n\hbar = j\hbar \qquad (j = \frac{n}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots) \tag{44}$$

Ta có

$$b_{min} = -b_{max} = -j\hbar \tag{45}$$

Như vậy, các đặc trị b của toán tử $\widehat{M}_z$ nhận những giá trị từ $-j\hbar$ đến $j\hbar$ như sau

$$b = -j\hbar, (-j+1)\hbar, (-j+2)\hbar, \ldots, (j-2)\hbar, (j-1)\hbar, j\hbar \tag{46}$$

$$(j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots)$$

và từ (37), ta tìm được các đặc trị c của toán tử $\widehat{M}^2$

$$c = j(j+1)\hbar^2 \qquad (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots) \tag{47}$$

Tóm lại, chỉ bằng cách sử dụng mối liên hệ hoán vị giữa các toán tử, chúng ta đã tìm được các đặc trị của $\widehat{M}^2$ và của $\widehat{M}_z$

$$\widehat{M}^2 Y = j(j+1)\hbar^2 Y \qquad (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots) \tag{48}$$

$$\widehat{M}_z Y = m_j \hbar Y \qquad (m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j) \tag{49}$$

Bên cạnh những giá trị j nguyên, chúng ta còn thấy xuất hiện những giá trị j bán nguyên. Điều này được dự đoán là có thể có thêm một loại mô-men góc khác nữa bên cạnh mô-men góc orbital. Thật vậy, trong những phần sau, chúng ta sẽ thấy mô-men góc spin có thể nhận những giá trị nguyên cũng như bán nguyên.

2 Phương pháp toán tử bậc thang cho dao động điều hòa

Toán tử năng lượng cho dao động điều hòa trong không gian một chiều được viết như sau

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2m}(i^2\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + m^2\omega^2 x^2) \tag{50}$$

với $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Các toán tử tăng $\widehat{A}_+$ và toán tử giảm $\widehat{A}_-$ trong trường hợp này được định nghĩa như sau

$$\widehat{A}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big(-i\hbar\frac{d}{dx} \pm im\omega x\Big) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big(\widehat{p}_x \pm im\omega x\Big) \tag{51}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_+\widehat{A}_- &= \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big(\widehat{p}_x + im\omega x\Big)\frac{1}{\sqrt{2m}}\Big(\widehat{p}_x - im\omega x\Big) \\
&= \frac{1}{2m}(\widehat{p}_x + im\omega x)(\widehat{p}_x - im\omega x) \\
&= \frac{1}{2m}(\widehat{p}_x^2 - im\omega\widehat{p}_x x + im\omega x\widehat{p}_x + m^2\omega^2x^2) \\
&= \frac{1}{2m}(\widehat{p}_x^2 + m^2\omega^2x^2 - im\omega\widehat{p}_x x + im\omega x\widehat{p}_x) \\
&= \frac{1}{2m}\Big(\widehat{p}_x^2 + m^2\omega^2x^2 + im\omega(x\widehat{p}_x - \widehat{p}_x x)\Big)
\end{aligned}$$

với

$$\frac{1}{2m}(\widehat{p}_x^2 + m^2\omega^2x^2) = \widehat{H}; \qquad (x\widehat{p}_x - \widehat{p}_x x) = [x, \widehat{p}_x] = i\hbar$$

Ta suy ra

$$\widehat{A}_+\widehat{A}_- = \widehat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega = \widehat{H} - \frac{1}{2}h\nu \tag{52}$$

hay

$$\widehat{H} = \widehat{A}_+\widehat{A}_- + \frac{1}{2}h\nu \tag{53}$$

Trong đó

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Tương tự, ta có

$$\widehat{A}_-\widehat{A}_+ = \widehat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega = \widehat{H} + \frac{1}{2}h\nu \tag{54}$$

hay

$$\widehat{H} = \widehat{A}_-\widehat{A}_+ - \frac{1}{2}h\nu \tag{55}$$

Từ (52) và (54) ta được

$$[\widehat{A}_+, \widehat{A}_-] = \widehat{A}_+\widehat{A}_- - \widehat{A}_-\widehat{A}_- = (\widehat{H} - \frac{1}{2}h\nu) - (\widehat{H} - \frac{1}{2}h\nu) = -h\nu \tag{56}$$

Mặt khác, ta có

$$[\widehat{A}_+, \widehat{H}] = [\widehat{A}_+, (\widehat{A}_+\widehat{A}_- + \frac{1}{2}h\nu)]$$

Xét
$$[\widehat{A}_+, (\widehat{A}_+\widehat{A}_- + \frac{1}{2}h\nu)]$$

Áp dụng các công thức
$$[\widehat{A}, \widehat{B} + \widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}] + [\widehat{A}, \widehat{C}]$$
$$[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}]\widehat{C} + \widehat{B}[\widehat{A}, \widehat{C}]$$

Ta có
$$\begin{aligned}
[\widehat{A}_+, (\widehat{A}_+\widehat{A}_- + \frac{1}{2}h\nu)] &= [\widehat{A}_+, \widehat{A}_+\widehat{A}_-] + [\widehat{A}_+, \frac{1}{2}h\nu] \\
&= [\widehat{A}_+, \widehat{A}_+]\widehat{A}_- + \widehat{A}_+[\widehat{A}_+, \widehat{A}_-] + 0 \\
&= 0 + \widehat{A}_+[\widehat{A}_+, \widehat{A}_-]
\end{aligned}$$

với $[\widehat{A}_+, \widehat{A}_-] = -h\nu$, ta thu được
$$[\widehat{A}_+, \widehat{H}] = -h\nu\widehat{A}_+ \tag{57}$$

Tương tự, ta có
$$[\widehat{A}_-, \widehat{H}] = h\nu\widehat{A}_- \tag{58}$$

Chúng ta có phương trình Schrödinger
$$\widehat{H}\psi = E\psi \tag{59}$$

Áp dụng $\widehat{A}_+$ lên $\widehat{H}\psi$, ta được
$$\widehat{A}_+(\widehat{H}\psi) = \widehat{A}_+E\psi = E\widehat{A}_+\psi \tag{60}$$

Từ (57) ta có
$$\widehat{A}_+\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{A}_+ = -h\nu\widehat{A}_+ \ \Rightarrow \widehat{A}_+\widehat{H} = \widehat{H}\widehat{A}_+ - h\nu\widehat{A}_+$$

Do đó, (60) trở thành
$$(\widehat{H}\widehat{A}_+ - h\nu\widehat{A}_+)\psi = E\widehat{A}_+\psi$$
$$\Rightarrow \widehat{H}(\widehat{A}_+\psi) = (E + h\nu)(\widehat{A}_+\psi) \tag{61}$$

Phương trình trên cho thấy $\widehat{A}_+\psi$ cũng là đặc hàm của $\widehat{H}$ với đặc trị $E + h\nu$ nếu ψ là đặc hàm của $\widehat{H}$. Điểm khác biệt là năng lượng tăng lên một bậc bằng $+h\nu$ so với năng lượng ở trạng thái ψ.

Tương tự, ta có
$$\widehat{H}(\widehat{A}_-\psi) = (E - h\nu)(\widehat{A}_-\psi) \tag{62}$$

Như vậy, $\widehat{A}_-\psi$ cũng là đặc hàm của $\widehat{H}$ với đặc trị $E - h\nu$. So với năng lượng ở trạng thái ψ, năng lượng ở trạng thái này giảm một bậc là $-h\nu$. Bởi vì đặc trị năng lượng của toán tử Hamiltonian chỉ nhận giá trị dương nên sự giảm này phải được dừng lại tại một điểm cụ thể nào đó. Điểm này được gọi là năng lượng điểm không, tức năng lượng thấp nhất của hệ. Tại đó, sự tác dụng của *toán tử giảm* $\widehat{A}_-$ không làm cho năng lượng của hệ giảm thêm được nữa

$$\widehat{A}_-\psi_0 = 0 \tag{63}$$

Ta có phương trình Schrödinger cho trạng thái ψ_0

$$\widehat{H}\psi_0 = E_0\psi_0 \tag{64}$$

với

$$\widehat{H} = \widehat{A}_+\widehat{A}_- + \frac{1}{2}h\nu$$

Do đó

$$(\widehat{A}_+\widehat{A}_- + \frac{1}{2}h\nu)\psi_0 = E_0\psi_0$$
$$\widehat{A}_+\widehat{A}_-\psi_0 + \frac{1}{2}h\nu\psi_0 = E_0\psi_0$$

Vì $\widehat{A}_-\psi_0 = 0$ nên

$$\frac{1}{2}h\nu\psi_0 = E_0\psi_0$$

Suy ra

$$E_0 = \frac{1}{2}h\nu \tag{65}$$

Mức năng lượng tiếp theo E_1 cao hơn năng lượng điểm không E_0 một bậc là $h\nu$

$$E_1 = E_0 + h\nu = (1 + \frac{1}{2})h\nu$$

Tương tự, mức năng lượng E_2 cao hơn mức năng lượng E_1 một bậc là $h\nu$

$$E_2 = E_1 + h\nu = (2 + \frac{1}{2})h\nu$$

Một cách tổng quát, năng lượng của dao động điều hòa được tính bởi

$$E_n = (n + \frac{1}{2})h\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{66}$$

Như vậy, dựa vào sự hoán vị của các toán tử, chúng ta cũng xác định được các đặc trị của dao động điều hòa. Kết quả hoàn toàn phù hợp với việc giải phương trình Schrödinger.

Bài tập

1. Toán tử tăng và toán tử giảm của mô-men góc được định nghĩa như sau

$$\widehat{M}_+ = \widehat{M}_x + i\widehat{M}_y$$
$$\widehat{M}_- = \widehat{M}_x - i\widehat{M}_y$$

Chứng minh

$$\widehat{M}_-\widehat{M}_+ = \widehat{M}^2 - \widehat{M}_z^2 - \hbar\widehat{M}_z$$

2. Toán tử tăng và toán tử giảm của dao động điều hòa được định nghĩa như sau

$$\widehat{A}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big(\widehat{p}_x \pm im\omega x\Big)$$

Chứng minh

$$\widehat{A}_-\widehat{A}_+ = \widehat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

3. Cho biết các đặc trị được phép của $\widehat{M}^2$ và của $\widehat{M}_z$. Nếu số lượng tử $j = \dfrac{1}{2}$ thì số lượng tử m_j nhận những giá trị nào? Gọi Y là đặc hàm chung của $\widehat{M}^2$ và $\widehat{M}_z$. Chứng minh

$$\widehat{M}_\pm^k Y \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

cũng là những đặc hàm chung $\widehat{M}^2$ và $\widehat{M}_z$.
4. Thực hiện phép giao hoán sau

$$[\widehat{A}_-, (\widehat{A}_-\widehat{A}_+ - \frac{1}{2}h\nu)]$$